INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL "EMIL RACOVIŢĂ" CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ"
Ediția a XXII-a, 22– 23 NOIEMBRIE 2024

Clasa a X-a

Problema 1 Arătaţi că $\sqrt[3]{7999} > \frac{159999}{8001}$.

Problema 2 Determinaţi funcţiile $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$ cu proprietatea că pentru orice x, y, $z \in (0, +\infty)$ au loc egalităţile: $f(x, y) = f(y, x)$ şi

$$\frac{x}{1+\lg^2(yz)} + \frac{y}{1+\lg^2(xz)} + \frac{z}{1+\lg^2(xy)} = \frac{x}{f(y,z)} + \frac{y}{f(z,x)} + \frac{z}{f(x,y)}.$$

Problema 3 Fie n, $k \in \mathbb{N}^*$ şi p_1, p_2, ..., $p_n \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$. Să se determine numerele reale x_1, x_2, ..., x_n pentru care avem

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^{3kx_i}}{p_i^{2kx_i} + p_{i+1}^{2kx_{i+1}}} = \frac{n}{2}\left(p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_n}\right)^{\frac{k}{n}},$$

unde $p_{n+1} = p_1$ şi $x_{n+1} = x_1$.

Problema 4 Fie M şi N două puncte fixate în plan şi $\mathcal{A}$ o mulţime de n puncte în plan. Pentru o submulţime $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{A}$ cu $|\mathcal{B}_k| = k$ definim $G_{\mathcal{B}}$ centrul de greutate al configuraţiei de puncte. De asemenea, pentru $Y \in \{M, N\}$ definim $S_Y(\mathcal{B})$ simetricul centrului de greutate $G_{\mathcal{B}}$ faţă de Y.

a) Demonstraţi că pentru $1 \leq k \leq n-1$ fixat toate dreptele determinate de $S_M(G_{\mathcal{B}_k})$ şi $S_N(G_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}_k})$ trec prin acelaşi punct G_k;

b) Demonstraţi că G_1, G_2, $\ldots G_{n-1}$ sunt coliniare.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
Fiecare subiect este evaluat cu 7 puncte.