INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL "EMIL RACOVIŢĂ" CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAŢIEI

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a XXII-a, 22– 23 NOIEMBRIE 2024

Clasa a XII-a

Problema 1 Dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ este dat, determinaţi primitiva F a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{x^{2n} - 1}{(x^{2n} + 1)^{\frac{n+1}{n}}}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

care verifică relaţia $F(0) = 0$.

Problema 2 Fie M o mulţime nevidă şi "$\cdot$"o lege de compoziţie internă pe M care verifică:

$a)$ este asociativă;

$b)$ $\left(a^2 b^2\right)^3 = ba, \forall a, b \in M$.

Să se arate că:

(i) $\left(a^3 b^3\right)^2 = ba, \forall a, b \in M$;

(ii) legea de compoziţie este comutativă.

Problema 3 Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $2n+1$ elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, astfel încât există $f : G \to G$ o funcţie cu proprietatea că $f(xf(xy)) = yf\left(x^2\right)$, pentru orice x, $y \in G$. Arătaţi că grupul este comutativ.

Problema 4 Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie primitivabilă, periodică, de perioadă $T > 0$ şi fie $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa cu $F(T) = F(0)$. Se consideră şirul armonic $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Demonstraţi că pentru orice $x_0 \geq 0$ există un subşir $(H_{n_k})_k$ al şirului $(H_n)_n$ pentru care:

$$\lim_{k \to \infty} F(H_{n_k}) = F(x_0).$$

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Fiecare subiect este evaluat cu 7 puncte.