INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL “EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAŢIEI

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ”
Ediţia a XXI-a, 26– 27 IANUARIE 2024

CLASA A X-A

Problema 1. Fie $n \geq 2$. Determinaţi funcţiile $f : (0,\infty)\times (0,\infty) \to (0,\infty)$ cu proprietatea că pentru orice $x, y, z \in (0,\infty)$ au loc simultan egalităţile:

a) $f(x,y) = f(y,x)$;

b) $\frac{x}{f(y,z)} + \frac{y}{f(z,x)} + \frac{z}{f(x,y)} = \frac{x}{\sqrt[n]{y^n+z^n}} + \frac{y}{\sqrt[n]{z^n+x^n}} + \frac{z}{\sqrt[n]{x^n+y^n}}$.

Problema 2. Se consideră numerele complexe distincte z_1, z_2 cu $Imz_1 \cdot Imz_2 > 0$. Să se determine minimul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x - z_1| + |x - z_2|$ şi punctul în care se atinge acest minim.

Problema 3. Determinaţi numerele reale x, y, soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} 2^{x^2} + 2^{\frac{1}{y^2}} = 2^{y+\frac{1}{x}} \\ 2^{y^2} + 2^{\frac{1}{x^2}} = 2^{x+\frac{1}{y}} \end{cases}.$$

Problema 4. Fie $U_n = \{1, \varepsilon, \cdots, \varepsilon^{n-1}\}$ rădăcinile unităţii de ordinul $n \geq 3$. Fie $\mathcal{F}$ o mulţime nevidă de funcţii $f : U_n \to U_n$ cu proprietăţile:

(a) Funcţia $r : U_n \to U_n$ definită prin $r(z) = \varepsilon z$ este în $\mathcal{F}$.

(b) Funcţia $s : U_n \to U_n$ definită prin $s(z) = \overline{z}$ este în $\mathcal{F}$.

(c) Dacă $f, g \in \mathcal{F}$ atunci $f \circ g \in \mathcal{F}$.

Determinaţi cardinalul minim al unei astfel de mulţimi $\mathcal{F}$.

Timpul de lucru este de 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.