INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL "EMIL RACOVIŢĂ" CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com
MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a XXI-a, 26–27 IANUARIE 2024

CLASA A XI-A

Problema 1. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 0$ şi $x_n = 1 + \frac{(n-1)^2}{1+x_{n-1}}$, oricare ar fi $n \geq 2$.

a) Să se studieze monotonia şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

b) Să se determine

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x_n}{n}\right)^n.$$

Problema 2. Dacă n este număr prim, demonstraţi că $\det(A+A^t) \neq n$, pentru orice $A \in M_n(\mathbb{Z})$.

Problema 3. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^3 = I_n$. Demonstraţi că pentru orice număr real $\alpha \neq 1$ avem $(A-\alpha I_n)^3 \neq O_n$, .

Problema 4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $f : [a,b] \to [a,b]$ o funcţie astfel ca $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|, \forall x, y \in [a,b]$ şi $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}$ şirurile definite astfel :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right), \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right), \forall n \geq 0,$$

unde $x_0, y_0 \in [a,b]$. Să se demonstreze că $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente şi au aceeaşi limită.

Timpul de lucru este de 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.