INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL "EMIL RACOVIŢĂ" CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +(40)264-591825; 431930
web : www.e-racovita.ro; e-mail: racovitacj@gmail.com

MINISTERUL EDUCAŢIEI

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ"
Ediţia a XXI-a, 26– 27 IANUARIE 2024

CLASA A XII-A

Problema 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e şi $H = \{x \in G : x^2 = e\}$.

a) Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) H este parte stabilă în raport cu „$\cdot$";

(ii) H este subgrup al lui G;

(iii) operaţia „$\cdot$" este comutativă pe H.

b) Pentru $n \geq 2$, notăm cu $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ grupul multiplicativ al matricilor pătratice inversabile de dimensiune n cu elemente reale. Este H un subgrup al lui $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pentru $n \geq 2$?

Problema 2. Pentru un număr natural $n \geq 0$ considerăm $I_n = \int \frac{x^n e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că pentru orice $n \geq 1$, are loc relaţia

$$(n+1)I_{n+1} + I_n + nI_{n-1} = x^n \sqrt{1+x^2} e^{\operatorname{arctg} x}.$$

b) Să se calculeze I_2.

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $2n+1$ elemente, $n \in \mathbb{N}$, pentru care există o funcţie $f : G \to G$ cu proprietatea că $f\left(x^2 f(y)\right) = xyf(f(x))$ oricare ar fi $x, y \in G$. Demonstraţi că G este comutativ.

Problema 4. Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie continuă, concavă şi $F, G : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definite prin $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ şi $G(x) = \int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt$. Să se arate că:

a) G este concavă;

b) pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$ are loc inegalitatea

$$2(F(|z|) + F(|w|)) \geq F(|z+w|) + F(|z-w|).$$

Timpul de lucru este de 3 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.