



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”
Ediția a XXIII-a, 21– 22 NOIEMBRIE 2025



Clasa a XI-a

1. Fie $m, n \geq 1$ numere naturale și $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $A^m = O_n$. Aflați matricele $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru care

$$ABA - B = AB - BA.$$

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, n \geq 1$. Să se determine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}.$$

3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Determinați toate matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pentru care există $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât:

$$X^t X + 2AX + X - X^t + AA^t = O_n,$$

unde prin M^t am notat transpusa matricei M .

4. Fie $m \geq 2$ un număr natural fixat și $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere naturale nenegative care verifică $a_{n+1} \leq a_n - a_{nm}$ pentru orice $n \geq 1$. Demonstrați că pentru orice $\alpha \geq 0$, șirul $(s_n)_{n \geq 1}, s_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha a_k$, este convergent.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore. Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte.