



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”
Ediția a XXIII-a, 21– 22 NOIEMBRIE 2025



Clasa a XII-a

1. Determinați toate funcțiile reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ cu proprietatea că $f \in \int \frac{xdx}{f(x)}$.
2. Pentru un grup finit $(G, \cdot)$ considerăm următoarele proprietăți:
 - (i) numărul subgrupurilor ciclice este strict mai mare decât $\frac{|G|+1}{2}$;
 - (ii) pentru $x \in G$ și $a \in G$, $a \neq e$ cu $x \cdot a = a^{-1} \cdot x$, rezultă că x aparține unui singur subgrup ciclic.
 - a) Demonstrați că nu există grup finit G care are simultan proprietățile (i) și (ii).
 - b) Dați exemplu de grup finit G_1 cu proprietatea (i).
 - c) Dați exemplu de grup finit G_2 cu proprietatea (ii).
3. Fie H și N subgrupuri proprii ale unui grup G . Dacă $xy = yx$ pentru orice $x \in G \setminus H$ și orice $y \in G \setminus N$, demonstrați că G este comutativ.
4. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este definit prin $x_1 < 0$, și $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$, $n \geq 1$. Să se demonstreze că:
 - (i) $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător și are limita 0;
 - (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = -2$;
 - (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (nx_n + 2) = -\frac{4}{3}$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul de lucru efectiv este de 3 ore. Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte.