Clasa a VII-a

VII 1. Ana și Bob iau alternativ pietricele dintr-o grămadă care conține $n \geq 2$ pietricele. Ana începe prima şi ia un număr nenul de pietricele, diferit de n, apoi fiecare jucător ia un număr (nenul) de pietricele care nu a mai fost luat pâna atunci. Pierde cel care nu mai poate face nicio mutare (adică sau nu mai are nicio pietricică de luat, sau trebuie să ia neapărat un număr de pietricele care a fost luat deja).

a) Care dintre cei doi jucători are o strategie câştigătoare dacă $n = 100$?

b) Aflaţi numerele n pentru care Ana are o strategie câştigătoare.

Robert Rogojan

Soluţie

a) Bob poate câştiga întotdeauna: observăm că pentru a nu pierde fiecare jucător trebuie să înjumătăţească numărul de pietricele, pentru că în caz contrar adversarul urmează la mutare şi poate lua toate pietricelele. . . . **1p**

Aşadar după prima lor mutare Ana şi Bob vor lăsa 50 şi 25 de pietricele. Acum Ana, care este la rând, nu mai poate înjumătăţi numărul de pietricele şi nici nu le poate lua pe toate. Dacă ia m pietricele, atunci Bob le poate lua pe toate, deoarece $m \neq 25 - m$, iar la primele două mutări s-au luat 50 şi 25 (deci mai mult de $25 - m$) pietricele. **2p**

b) Din raţionamentul de la a) rezultă că pentru a câştiga Ana, trebuie ca după toate înjumătăţirile succesive posibile, jucătorul care este la mutare (care are deci de ales dintr-un număr impar i de pietricele) să fie Bob: el nu poate lua toate pietricelele deoarece la ultima înjumătăţire Ana a luat i pietricele, iar dacă ia $0 < m < i$ pietricele atunci Ana poate lua toate cele $i - m$ pietricele rămase, deoarece $i - m \neq m$ şi $i - m < i$, iar i este cel mai mic număr de pietricele care au fost luate la mutările anterioare. **3p**

Aceasta se întâmplă doar dacă s-a efectuat un număr impar de înjumătăţiri, deci dacă şi numai dacă exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a lui n este impar, adică n este de forma $2^a b$ cu a, b impare. **3p**

VII 2. Pentru fiecare patru numere a_1, a_2, a_3, a_4 cu proprietatea:

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

scriem pe tablă numărul $|a_1 - a_2\sqrt{2}| + |a_2 - a_3\sqrt{2}| + |a_3 - a_4\sqrt{2}| + |a_4 - a_1\sqrt{2}|$.

a) Câte dintre numerele scrise pe tablă sunt raţionale?

b) Câte sunt egale cu $4\sqrt{2}$?

Dorel Miheţ

Soluţia 1

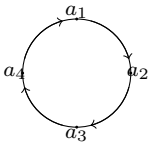
a) După explicitarea modulelor şi efectuarea adunărilor se obţine pentru fiecare număr scris pe tablă un număr de forma $a + b\sqrt{2}$.

Deoarece $1 < \sqrt{2} < 2 < 2\sqrt{2} < 3 < 4 < 3\sqrt{2} < 4\sqrt{2}$, numerele $3\sqrt{2}$ şi $4\sqrt{2}$ au întotdeuna semnul $+$, deci $b \geq 4 + 3 - 1 - 2 = 4$, ceea ce înseamnă că $a + b\sqrt{2}$ este iraţional, fiind suma dintre un număr raţional şi un număr iraţional. Aşadar niciun număr scris pe tablă nu este raţional. **3p**

b) Observăm că temenii sumei

$$|a_1 - a_2\sqrt{2}| + |a_2 - a_3\sqrt{2}| + |a_3 - a_4\sqrt{2}| + |a_4 - a_1\sqrt{2}|$$

sunt de forma $|x - y\sqrt{2}|$, unde x precede y în ciclul:



(notat în continuare (a_1, a_2, a_3, a_4)), şi fiecare dintre numerele $-\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $-4\sqrt{2}$ apare în această sumă de module o singură dată.

Ţinând din nou seama de inegalităţile:

$$1 < \sqrt{2} < 2 < 2\sqrt{2} < 3 < 4 < 3\sqrt{2} < 4\sqrt{2},$$

deducem că pentru a obţine ca rezultat $4\sqrt{2}$ (adică $a = 0, b = 4$), trebuie ca după explicitarea modulelor $\sqrt{2}$ şi $2\sqrt{2}$ să aibă semnul $-$, deci 3 sau 4 să preceadă 2 în ciclul (a_1, a_2, a_3, a_4), iar 4 să aibă semnul $-$ în $-1 \pm 2 \pm 3 \pm 4$, deci să-l preceadă pe 3, adică ciclul (a_1, a_2, a_3, a_4) să fie $(4, 3, 2, 1)$. **4p**

Rezultă că exact 4 dintre cele 24 de numere scrise pe tablă sunt egale cu $4\sqrt{2}$ (ciclul poate începe cu 1 ((1, 4, 3, 2)), 2 ((2, 1, 4, 3)), 3 sau 4). **2p**

Deoarece 24 nu este un număr prea mare, este posibilă şi o abordare directă: determinăm efectiv mulţimea acestor numere. Prezentăm un mod de simplificare a calculelor, care reduce numărul cazurilor la 6. El se bazează pe observaţia că un ciclu (a_1, a_2, a_3, a_4) generează 4 numere egale (suma din enunţ este invariantă la permutări ciclice).

Soluţia 2

Observăm că $(a_1, a_2, a_3, a_4), (a_4, a_1, a_2, a_3), (a_3, a_4, a_1, a_2), (a_2, a_3, a_4, a_1)$ reprezintă acelaşi ciclu, deci

$$|a_1 - a_2\sqrt{2}| + |a_2 - a_3\sqrt{2}| + |a_3 - a_4\sqrt{2}| + |a_4 - a_1\sqrt{2}| =$$
$$= |a_4 - a_1\sqrt{2}| + |a_1 - a_2\sqrt{2}| + |a_2 - a_3\sqrt{2}| + |a_3 - a_4\sqrt{2}| =$$
$$= |a_3 - a_4\sqrt{2}| + |a_4 - a_1\sqrt{2}| + |a_1 - a_2\sqrt{2}| + |a_2 - a_3\sqrt{2}| =$$
$$= |a_2 - a_3\sqrt{2}| + |a_3 - a_4\sqrt{2}| + |a_4 - a_1\sqrt{2}| + |a_1 - a_2\sqrt{2}|$$

(avem aceiaşi termeni, în altă ordine). **3p**

Aşadar fiecare ciclu (a_1, a_2, a_3, a_4) generează 4 numere egale, şi cum sunt doar 6 cicluri distincte şi anume $(1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2)$, $(1,4,2,3), (1,4,3,2)$, cel mult 6 dintre cele 24 de numere sunt distincte. **2p**

Calculând suma pentru fiecare ciclu obţinem numerele:
$-1+2\sqrt{2}-2+3\sqrt{2}-3+4\sqrt{2}+4-\sqrt{2}=-2+8\sqrt{2}$,
$-1+2\sqrt{2}-2+4\sqrt{2}-4+3\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=-4+8\sqrt{2}$,
$-1+3\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-2+4\sqrt{2}+4-\sqrt{2}=4+4\sqrt{2}$,
$-1+3\sqrt{2}-3+4\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=2+4\sqrt{2}$,
$-1+4\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}-2+3\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=4+4\sqrt{2}$ şi $4\sqrt{2}$..... **3p**

Conchidem că dintre cele 24 de numere 4 sunt egale cu $4\sqrt{2}$, 4 cu $2+4\sqrt{2}$, 8 cu $4+4\sqrt{2}$, 4 cu $-2+8\sqrt{2}$ şi 4 cu $-4+8\sqrt{2}$.

Fiind sume dintre un număr raţional şi un număr iraţional, toate aceste numere sunt iraţionale. **1p**

VII 3. Fie A_0, B_0, C_0 mijloacele laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC în care $AB > BC > CA$. Pe latura AB se consideră punctele A_1, B_1, iar pe latura BC punctul C_1 astfel ca

$$CA + AA_1 = A_1B,\ CB + BB_1 = B_1A,\ AC + CC_1 = C_1B.$$

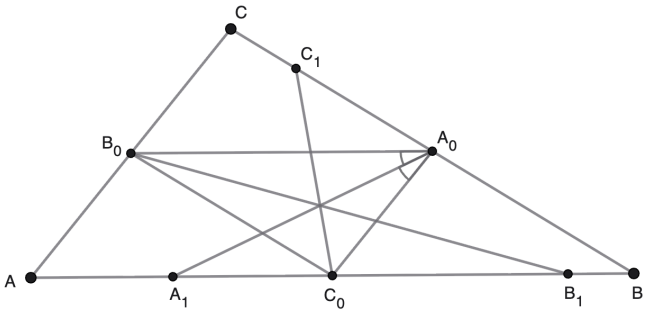
Demonstraţi că:

a) $\angle A_0A_1B = \dfrac{\angle CAB}{2}$;

b) dreptele A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0 sunt concurente.

Clasic

Soluţie



a) Deoarece A_0B_0 şi A_0C_0 sunt linii mijlocii în triunghiul ABC, patrulaterul $AB_0A_0C_0$ este paralelogram, deci $\angle CAB = \angle B_0A_0C_0$. De asemenea, $\angle A_0A_1B = \angle B_0A_0A_1$ (alterne interne), deci $\angle A_0A_1B = \dfrac{\angle CAB}{2}$ dacă şi numai dacă $\angle A_1A_0C_0 = \angle A_0A_1B$, adică dacă şi numai dacă $A_1C_0 = C_0A_0$.

Deci va fi suficient să arătăm că $A_1C_0 = \frac{AC}{2}$, iar această egalitate rezultă din egalităţile din enunţ astfel: $2A_1B = CA + AA_1 + A_1B = CA + AB$, deci $A_1C_0 = A_1B - C_0B = \frac{BA+AC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2}$. **4p**

b) Din a) rezultă că A_0A_1 este bisectoarea unghiului $B_0A_0C_0$. **2p**

La fel se arată că B_0B_1 şi C_0C_1 sunt bisectoarele unghiurilor B_0, C_0 ale triunghiului $A_0B_0C_0$, deci A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghiul $A_0B_0C_0$. **3p**

Observaţie

Fiecare din dreptele A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0 trece prin mijllocul unei laturi şi împarte perimetrul triunghiului ABC în două părţi egale. O astfel de dreaptă se numeşte separatoare, deci punctul b) al problemei ne spune că cele trei drepte separatoare ale unui triunghi sunt concurente. Am văzut că punctul de concurenţă este centrul cercului înscscris în triunghiul median, numit şi *punctul lui Spieker*. Pentru alte probleme de acest tip recomandăm articolul "În legătură cu teorema bisectoarei glisante" (RMT 3/2009, autor Andrei Eckstein).

VII 4. Fie M mijlocul laturii AB a pătratului $ABCD$. Construim pătratul $MDPN$, astfel încât punctele P și B să se afle în semiplane opuse față de dreapta MD şi notăm cu G intersecția dreptelor DA și MN.

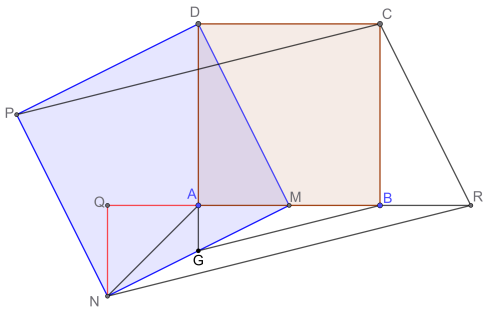
Demonstraţi că:

a) G este mijlocul lui MN;

b) $BG \parallel CP$.

Adrian Bud

Soluţie



a) Fie Q simetricul lui M faţă de A.

Din $DM = MN$, $QM = AD$ şi $\angle ADM = \angle QMN$ (=$90^\circ - \angle DGM$) rezultă că $\triangle ADM = \triangle QMN$ (LUL), deci $\angle NQM = 90^\circ$.

Prin urmare $QN \parallel AG$, şi cum A este mijlocul lui QM, AG este linie mijlocie în triunghiul QMN, deci G este mijlocul lui MN. **5p**

Observaţie

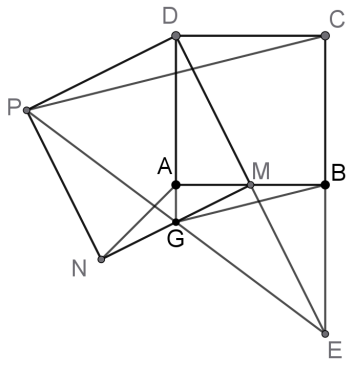
AG este linie mijlocie în triunghiul MNQ, deci

$$AG = \frac{QN}{2} = \frac{AM}{2} = \frac{AB}{4}.$$

b) Fie R simetricul lui M faţă de B. Ţinând seama de a), deducem că GB este linie mijlocie în triunghiul MNR, deci $GB \parallel NR$.

Deoarece $MR \parallel DC$ şi $MR = DC$, $DCRM$ este paralelogram, prin urmare $CR = PN$ şi $CR \parallel PN$, de unde rezultă că $PNRC$ este paralelogram, deci $NR \parallel PC$, şi atunci $GB \parallel CP$, c.t.t.d. **4p**

Altă soluţie pentru punctul b)



Notăm cu E intersecţia dreptelor DM şi BC.

Din $MB \parallel DC$ şi $MB = \frac{DC}{2}$ rezultă că MB este linie mijlocie în triunghiul DCE, deci $CB = BE$ şi $DM = ME$.

Ţinând seama de a) deducem că $\triangle MGE = \triangle NGP$ (CC).

Aşadar $\angle PGN = \angle MGE$, de unde rezultă că punctele P, G, E sunt coliniare.

De asemenea, $PG = GE$ şi cum $CB = BE$, GB este linie mijlocie în triunghiul PCE, deci $GB \parallel PC$. **4p**

Observaţie

Atât punctul a) cât şi punctul b) se pot rezolva fară construcţii auxiliare folosind asemănarea, însă noţiunra de asemănare nu face parte din programa de concurs.

De exemplu, pentru a), din asemănarea triunghiurilor AMG şi ADM rezultă $\frac{AD}{AM} = \frac{DM}{MG}$, deci $MG = \frac{DM}{2} = \frac{MN}{2}$.