Clasa a VIII-a

VIII 1. Pentru fiecare număr natural nenul n notăm cu z_n numărul zerourilor în care se termină $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$.

Determinaţi cel mai mic număr n pentru care $z_{n+10} - z_n = 2026$.

Olimpiadă Bulgaria

Soluţie

Numărul z_n este egal cu exponentul lui 5 în descompunerea în factori primi a numărului $n!$. **2p**

Rezultă că $z_{n+10} - z_n$ este exponentul lui 5 din descompunerea în factori primi a numărului $(n+1)(n+2)...(n+10)$. **2p**

În acest produs exact doi factori se divid cu 5 şi cel mult unul dintre ei se divide cu 25. ..... **2p**

Pentru a obţine diferenţa de 2026 trebuie ca factorul divizibil cu 25 să se dividă cu 5^{2025}, deci cel mai mic număr n se obţine pentru $n + 10 = 5^{2025}$. Răspuns: $n = 5^{2025} - 10$. **3p**

VIII 2. Notăm cu I_C şi I_B centrele cercurilor înscrise în feţele VAB, respectiv VAC ale piramidei $VABC$. Demonstraţi că:

a) dacă $I_BI_C \parallel BC$ atunci $BA = CA$ şi $BV = CV$;

b) dacă I_BI_C şi BC sunt concurente, atunci $BA \cdot CV = CA \cdot BV$.

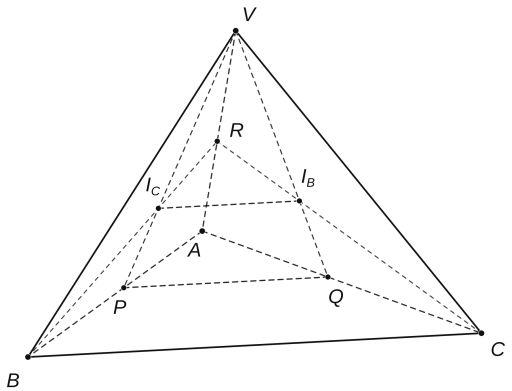
Dorel Miheţ

Soluţie

Fie $P = VI_C \cap AB$ şi $Q = VI_B \cap AC$.

Din $I_BI_C \parallel BC$ rezultă $BC \parallel (VI_BI_C)$, şi cum $(VI_BI_C) \cap (ABC) = PQ$, dreptele PQ şi BC sunt paralele, deci $I_BI_C \parallel PQ \parallel BC$. **2p**

Rezultă că $\dfrac{VI_C}{I_CP} = \dfrac{VI_B}{I_BQ}$ şi $\dfrac{BP}{PA} = \dfrac{CQ}{QA}$. **1p**



Din teorema bisectoarei în triunghiurile VAB şi VAC rezultă

$$\frac{PB}{PA} = \frac{BV}{AV} \text{ şi } \frac{QC}{QA} = \frac{CV}{AV},$$

deci $BV = CV$.

Din teorema bisectoarei în triunghiurile VBP şi VCQ rezultă

$$\frac{VI_C}{I_CP} = \frac{BV}{BP} \text{ şi } \frac{VI_B}{I_BQ} = \frac{CV}{QC},$$

deci $BP = QC$, şi cum $\frac{BP}{PA} = \frac{CQ}{QA}$, avem şi $BA = CA$. **3p**

b) Fie $R = BI_C \cap VA$. Dreptele I_BI_C şi BC sunt coplanare, fiind concurente.

Atunci $R = BI_C \cap VA \Rightarrow R \in (BCI_B) \cap (VAC) = CI_B$, deci CI_B şi BI_C sunt concurente în R. **2p**

Din teorema bisectoarei în triunghiurile VAB şi VAC rezultă că

$$\frac{BV}{BA} = \frac{RV}{RA} = \frac{CV}{CA},$$

deci $CA \cdot BV = BA \cdot CV$. **1p**

Concluzia de la b) este adevărată dacă punctele B, C, I_B, I_C sunt coplanare, deci soluţia poate fi simplificată dacă începem rezolvarea cu punctul b).

Soluţia 2

b) Demonstrăm b) ca în prima soluţie. **3p**

a) Demonstrăm că $BV = CV$ ca în prima soluţie ..... **4p (2p+2p)**

Paralelismul $I_BI_C \parallel BC$ implică coplanaritatea punctelor B, C, I_B, I_C. Din b) rezultă atunci $BA \cdot CV = CA \cdot BV$, deci şi $BA = CA$. **2p**

VIII 3. Fie $S = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}$, unde

$$a, b, c \in [0, \infty) \text{ şi } a + b + c = 1.$$

a) Demostraţi că cea mai mare valoare a lui S este 2.

b) Dacă în plus $a \leq b + c, b \leq a + c, c \leq a + b$, demonstraţi că cea mai mare valoare a lui S este $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi aflaţi numerele a, b, c pentru care $S = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Gh. Lobonţ şi Dorel Miheţ

Soluţie

a) Din $a^2 + b^2 \leq (a + b)^2$ rezultă $\sqrt{a^2 + y^2} \leq a + b$, cu egalitate când $ab = 0$.

Scriind şi celelalte două inegalităţi similare şi adunând obţinem

$S \leq 2(a + b + c) = 2$ **2p**

Pentru $a = b = 0, c = 1$ avem egalitate, deci valoarea maximă a lui S este 2 ..... **1p**

b) Putem presupune că $a \leq b \leq c$. Arătăm că

$$\sqrt{b^2+c^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{c^2+a^2} \leq c + \frac{a}{2}, \sqrt{a^2+b^2} \leq b + \frac{a}{2}.$$

Într-adevăr, $\sqrt{b^2+c^2} \leq \sqrt{2c^2} = \sqrt{2}c \leq \sqrt{2}\frac{a+b+c}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **1p**

$$\sqrt{c^2+a^2} \leq c + \frac{a}{2} \Leftrightarrow a^2 + c^2 \leq c^2 + ac + \frac{a^2}{4} \leq 0 \Leftrightarrow a(\frac{3}{4}a - c) \leq 0,$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \leq b + \frac{a}{2} \Leftrightarrow a(\frac{3}{4}a - b) \leq 0.$$

Adunând membru cu membru aceste inegalităţi obţinem

$$\sum \sqrt{a^2+b^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + a + b + c,$$

deci $S \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ **2p**

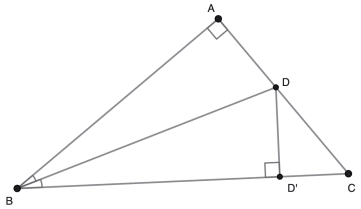
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $c = a+b$, $a(\frac{3}{4}a-c) = a(\frac{3}{4}a-b) = 0$, deci dacă şi numai dacă $c = a + b$ şi $a = 0$ ($c = \frac{3}{4}a$ şi $c \geq a \geq 0$, implică $c = a = 0$, deci $a = b = c = 0$, absurd)..... **2p**

Cum $a + b + c = 1$, rezultă că $S = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ dacă şi numai dacă $a = 0, b = c = \frac{1}{2}$. Aşadar egalitatea are loc când unul dintre numere este 0, iar celelalte două sunt egale cu $\frac{1}{2}$..... **1p**

Observaţii

1) Din $\frac{(a+b)^2}{2} \leq a^2 + b^2$ rezultă $\sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$, cu egalitate când $a = b = \frac{1}{3}$. Rezultă că $S \geq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, cu egalitate când $a = b = c = \frac{1}{3}$, deci în ambele cazuri valoarea minimă a lui S este $\sqrt{2}$.

2) Dacă $0 < y \leq x$, are loc inegalitatea strictă $\sqrt{x^2+y^2} < x + \frac{y}{2}$. Această inegalitate are următoarea interpretare geometrică: într-un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza BC şi AC cea mai mică catetă are loc inegalitatea $BC < AB + \frac{AC}{2}$, care poate fi demonstrată pur geometric urmărind figura următoare: ($\angle C \geq 45^\circ \Rightarrow \angle CDD' \leq 45^\circ \Rightarrow D'C \leq DD'$ şi $D'C = BC - AB, D'D = AD < DC \Rightarrow DD' < \frac{AC}{2}$)



VIII 4.a) Găsiţi un număr natural $k > 2$ cu proprietatea că există o aşezare a numerelor naturale de la 1 la k^2 în pătrăţelele unei table de şah cu k linii şi k coloane astfel încât suma numerelor din fiecare linie să fie un pătrat perfect (nu neapărat acelaşi).

b) Putem aşeza numerele naturale de la 1 la k^2 ($k \geq 2$) în pătrăţelele unei table de şah cu k linii şi k coloane astfel încât suma numerelor din fiecare linie să fie o putere a lui 2 (nu neapărat aceeaşi)?

Folclor

Soluţie

a) Cel mai mic număr k cu această proprietate este $k = 5$, iar o aşezare ca cea cerută în enunţ este de exemplu:

$$\begin{pmatrix} 25 & 23 & 21 & 16 & 15 \\ 24 & 22 & 19 & 18 & 17 \\ 20 & 14 & 11 & 10 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 13 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 12 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{3p}$$

Putem găsi un astfel de exemplu astfel: începem cu cele mai mici numere k şi constatăm că pentru $k = 3$ şi $k = 4$ nu găsim table bune (ecuaţiile $x+y+z = 45, x, y, z \in \{9, 16\}$ şi $x+y+z+t = 136, x, y, z, t \in \{16, 25, 36, 49\}$ nu au soluţii), iar pentru $k = 5$ suma tuturor numerelor este $25 \cdot 13 = 325$ şi 325 poate fi scris ca sumă de 5 pătrate mai mari decât 15, de exemplu $325 = 100 + 100 + 64 + 36 + 25$.

b) Fie $s_1, s_2, ..., s_k$ sumele de pe linii.

Presupunem că $s_1 = 2^{m_1}$, $s_2 = 2^{m_2}$, ..., $s_k = 2^{m_k}$.

Dacă $s = 2^m$ este cea mai mică dintre aceste sume, atunci 2^m divide $s_1, s_2, ...s_k$, deci 2^m divide şi

$$2^{m_1} + 2^{m_2} + ... + 2^{m_k} = 1 + 2 + ... + k^2 = \frac{k^2(k^2+1)}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{2p}$$

Deoarece $2^m > 1$ şi unul dintre numerele k^2, k^2+1 este impar, 2^m divide unul dintre numerele $\frac{k^2}{2}$, $\frac{k^2+1}{2}$, deci $2^m \leq \frac{k^2+1}{2}$. $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{2p}$

Pe de altă parte $2^m \geq 1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2} > \frac{k^2+1}{2}$ şi am ajuns la o contradicţie, care ne arată că o astfel de aşezare este imposibilă. $\ldots$ **2p**