INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A X-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Determinați toate numerele complexe z de modul 1 cu proprietatea că

$$\left|z-\frac{1}{z}\right|=\left|z^2-\frac{1}{z^2}\right|+\left|z^3-\frac{1}{z^3}\right|.$$

Dorin Andrica

Soluție.

Scriem $z=a+bi$, unde $a,b\in\mathbb{R}$ și $a^2+b^2=1$. Atunci $1/z=\overline{z}=a-bi$, deci $z-1/z=2bi$ și $z+1/z=2a$. Avem $|z-1/z|=2|b|$, iar prin descompunerile diferenței de pătrate și de cuburi obținem

$$\left|z^2-\frac{1}{z^2}\right|=\left|z-\frac{1}{z}\right|\left|z+\frac{1}{z}\right|=4|ab|,$$

$$\left|z^3-\frac{1}{z^3}\right|=\left|z-\frac{1}{z}\right|\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-1\right|=2|b|\,|4a^2-1|.$$

Dacă $b=0$, avem $a=\pm1$, iar numerele $z=\pm1$ verifică egalitatea.

Dacă $b\neq0$, împărțim egalitatea dată prin $2|b|$ și obținem $2|a|+|4a^2-1|=1$. Notând $u=2|a|\geq0$, aceasta devine $u+|u^2-1|=1$. Rezultă $0\leq u\leq1$, deci $u+1-u^2=1$, de unde $u(1-u)=0$. Așadar, $u=0$ sau $u=1$, adică $a=0$ sau $a=\pm\frac{1}{2}$. Din $a^2+b^2=1$ rezultă, respectiv, $b=\pm1$ sau $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Toate valorile obținute au modulul 1 și verifică egalitatea, conform relațiilor de mai sus. Prin urmare, soluțiile sunt

$$z\in\left\{\pm1,\ \pm i,\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Scrierea $z=a+bi$, folosirea relației $1/z=\overline{z}$ și exprimarea celor trei module în funcție de a,b.	3 p.
Tratarea cazului $b=0$ și obținerea soluțiilor $z=\pm1$.	1 p.
Pentru $b\neq0$, reducerea la $u+\|u^2-1\|=1$, unde $u=2\|a\|$ (1 p.), și rezolvarea ecuației: $u=0$ sau $u=1$ (2 p.).	3 p.
Determinarea celorlalte valori ale lui z și verificarea tuturor soluțiilor.	2 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A X-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 2.

Determinați soluțiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} 2^x + 3^{1/y} = 5, \\ 2^y + 3^{1/x} = 5. \end{cases}$$

Mihai Opincariu

Soluția I.

Sistemul este definit pentru $x, y \neq 0$. Dacă $x < 0$, atunci $3^{1/y} = 5 - 2^x > 4 > 3$, deci $0 < y < 1$. Rezultă $2^y + 3^{1/x} < 2 + 1 = 3$, contradicție. Prin simetrie, avem $x, y > 0$.

Dacă $x > y$, atunci $2^x > 2^y$ și $3^{1/y} > 3^{1/x}$, deci prima sumă din sistem este mai mare decât a doua, contradicție. Analog, $x < y$ este imposibil. Așadar, $x = y = t > 0$, iar $2^t + 3^{1/t} = 5$.

Notăm cu $a \leq b$, în ordine crescătoare, numerele 2^t și $3^{1/t}$. Atunci

$$a, b > 1, \qquad a + b = 5, \qquad \ln a \, \ln b = \ln 2 \, \ln 3.$$

Vom arăta că $a = 2$ și $b = 3$. Avem $a \leq 5/2$ și $ab - 6 = (a-2)(3-a)$. Folosim identitățile

$$4 \ln a \, \ln b = (\ln(ab))^2 - \big(\ln(b/a)\big)^2,$$
$$4 \ln 2 \, \ln 3 = (\ln 6)^2 - \big(\ln(3/2)\big)^2.$$

Toți logaritmii ridicați la pătrat sunt nenegativi. Dacă $a < 2$, atunci $ab < 6$ și $b/a > 3/2$, deci prima diferență este strict mai mică decât a doua. Dacă $a > 2$, avem $2 < a \leq b < 3$, deci $ab > 6$ și $1 \leq b/a < 3/2$; prima diferență este atunci strict mai mare decât a doua. Ambele cazuri contrazic egalitatea $\ln a \, \ln b = \ln 2 \, \ln 3$.

Prin urmare, $\{2^t, 3^{1/t}\} = \{2, 3\}$, de unde $t = 1$ sau $t = \log_2 3$. Ambele valori verifică ecuația; pentru a doua, $3^{1/t} = 3^{\log_3 2} = 2$. Soluțiile sistemului sunt $(x, y) = (1, 1)$ și $(x, y) = (\log_2 3, \log_2 3)$.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Demonstrarea faptului că $x, y > 0$ (1 p.) și a egalității $x = y = t$ (1 p.).	2 p.
Introducerea numerelor a, b, relația $\ln a \, \ln b = \ln 2 \, \ln 3$ și identitățile utilizate.	2 p.
Excluderea cazurilor $a < 2$ și $a > 2$ (câte 2 puncte pentru fiecare caz).	4 p.
Determinarea și verificarea celor două soluții ale sistemului.	1 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.



Problema 2 (continuare).

Soluția a II-a.

Sistemul este definit pentru $x, y \neq 0$. Dacă $y < 0$, din prima ecuație rezultă $2^x = 5 - 3^{1/y} > 4$, deci $x > 2$. Atunci, din a doua ecuație, $5 = 2^y + 3^{1/x} < 1 + 3 = 4$, contradicție. Așadar, $y > 0$ și, prin simetrie, $x > 0$.

Scăzând cele două ecuații, obținem

$$2^x - 2^y = 3^{1/x} - 3^{1/y}.$$

Dacă $x \neq y$, membrul stâng are semnul lui $x - y$, iar membrul drept are semnul lui $1/x - 1/y = (y - x)/(xy)$, deci semnul opus. Rezultă $x = y = t > 0$, iar sistemul se reduce la ecuația

$$2^t + 3^{1/t} = 5.$$

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(u) = 3^u$, este strict crescătoare și strict convexă, iar funcția $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(t) = 1/t$, este strict convexă. Prin urmare, compunerea $f \circ g$ este strict convexă. Într-adevăr, pentru $s, t > 0$, $s \neq t$ și $\lambda \in (0, 1)$, avem

$$\begin{aligned} f\big(g(\lambda s + (1-\lambda)t)\big) &< f\big(\lambda g(s) + (1-\lambda)g(t)\big) \\ &\leq \lambda f(g(s)) + (1-\lambda) f(g(t)). \end{aligned}$$

Cum și funcția $h(t) = 2^t$ este strict convexă, rezultă că $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(t) = 2^t + 3^{1/t}$, este strict convexă.

Ecuația $F(t) = 5$ are cel mult două soluții. Altfel, pentru trei soluții $a < b < c$, stricta convexitate ar da

$$F(b) < \frac{c-b}{c-a} F(a) + \frac{b-a}{c-a} F(c) = 5,$$

în contradicție cu $F(b) = 5$.

Valorile distincte $t = 1$ și $t = \log_2 3$ verifică ecuația: $F(1) = 2+3 = 5$, iar $1/\log_2 3 = \log_3 2$ dă $F(\log_2 3) = 3+2 = 5$. Prin urmare, soluțiile sistemului sunt

$$(x, y) = (1, 1) \quad \text{sau} \quad (x, y) = (\log_2 3, \log_2 3).$$

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Demonstrarea faptului că $x, y > 0$.	1 p.
Deducerea egalității $x = y = t$ și reducerea sistemului la ecuația $2^t + 3^{1/t} = 5$, cu $t > 0$.	1 p.
Convexitatea strictă a funcțiilor $g(t) = 1/t$ și $h(t) = 2^t$ (1 p.); convexitatea strictă a compunerii $f \circ g$, unde $f(u) = 3^u$, și a funcției $F = h + f \circ g$ (2 p.).	3 p.
Justificarea faptului că ecuația $F(t) = 5$ are cel mult două soluții.	2 p.
Determinarea și verificarea valorilor $t = 1$, $t = \log_2 3$ și concluzia privind soluțiile sistemului.	2 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Punctajele celor două soluții nu se cumulează. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A X-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 3.

Determinați cea mai mare constantă reală C pentru care

$$|1+z^2|+|1+z^3|+|1+z^5|+|1+z^6|\geq C|1-z|,$$

pentru orice număr complex z de modul 1. Pentru valoarea găsită a lui C, determinați toate valorile lui z pentru care are loc egalitatea.

Dan Dumitrescu

Soluție.

Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, inegalitatea triunghiului și $|z|=1$ dau

$$|1+z^n|+|1+z^{n+1}|\geq|(1+z^n)-(1+z^{n+1})|=|z^n(1-z)|=|1-z|.$$

Aplicând pentru $n=2$ și $n=5$ și adunând, obținem inegalitatea cerută pentru $C=2$. Pe de altă parte, pentru $z=-1$, inegalitatea din enunț devine $4\geq 2C$, deci $C\leq 2$. Așadar, cea mai mare constantă este $C=2$.

Notăm $u=1+z^n$ și $v=1+z^{n+1}$. Dacă $u,v\neq 0$, egalitatea $|u|+|v|=|u-v|$ ar impune $u=-\lambda v$, cu $\lambda>0$. Dar, pentru $|w|=1$, avem $\operatorname{Re}(1+w)=|1+w|^2/2$. Astfel, $\operatorname{Re}u>0$ și $\operatorname{Re}v>0$, ceea ce contrazice $u=-\lambda v$. Dacă unul dintre u,v este nul, egalitatea are loc. Prin urmare, egalitatea pentru pereche este echivalentă cu $z^n=-1$ sau $z^{n+1}=-1$.

În suma celor două inegalități avem egalitate dacă și numai dacă

$$(z^2=-1 \text{ sau } z^3=-1)\quad\text{și}\quad(z^5=-1 \text{ sau } z^6=-1).$$

Dacă $z^2=-1$, atunci $z=\pm i$ și $z^6=(z^2)^3=-1$. Dacă $z^3=-1$, atunci $z^6=1$, deci trebuie să avem $z^5=-1$. Împărțind cele două egalități, obținem $z^2=1$, iar din $z^3=-1$ rezultă $z=-1$. Toate cele trei valori verifică egalitatea. Așadar, aceasta are loc exact pentru $z\in\{-1,i,-i\}$.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Aplicarea inegalității triunghiului pentru cele două perechi și demonstrarea inegalității pentru $C=2$.	3 p.
Folosirea valorii $z=-1$ pentru a demonstra că $C\leq 2$.	1 p.
Justificarea faptului că egalitatea pentru o pereche apare exact când $z^n=-1$ sau $z^{n+1}=-1$.	3 p.
Condițiile simultane de egalitate, determinarea valorilor $z\in\{-1,i,-i\}$ și verificarea lor.	2 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A X-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 4.

Fie $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $n \geq 3$ este un număr natural. Inițial, toate numerele din M au scorul 0. Pentru fiecare pereche ordonată (A, B) de submulțimi nedisjuncte ale lui M, adăugăm la scorul fiecărui număr $k \in A \cap B$ cel mai mic element al lui $A \cap B$. Determinați scorul final al fiecărui număr din M.

Cristi Săvescu

Soluție.

Fixăm $k \in M$ și notăm cu s_k scorul său final. Pentru o pereche (A, B) cu $k \in A \cap B$, fie $m = \min(A \cap B)$. Contribuția m la scorul lui k poate fi numărată ca o unitate pentru fiecare $t = 1, \ldots, m$. Cum $m \leq k$, rezultă că $s_k = N_1 + N_2 + \cdots + N_k$, unde N_t este numărul perechilor ordonate (A, B) pentru care $k \in A \cap B$ și $\min(A \cap B) \geq t$.

Pentru a calcula N_t, observăm că niciunul dintre cele $t - 1$ numere mai mici decât t nu poate aparține intersecției. Fiecare are astfel trei posibilități: aparține doar lui A, doar lui B sau niciuneia dintre ele.

Numărul k aparține obligatoriu ambelor mulțimi. Fiecare dintre celelalte $n - t$ numere are patru posibilități: aparține ambelor mulțimi, doar lui A, doar lui B sau niciuneia dintre ele. Alegerile se fac independent, deci

$$N_t = 3^{t-1}4^{n-t}, \qquad t = 1, \ldots, k.$$

Folosind suma unei progresii geometrice, obținem

$$s_k = \sum_{t=1}^{k} 3^{t-1}4^{n-t} = 4^{n-1}\frac{1 - (3/4)^k}{1 - 3/4} = 4^{n-k}(4^k - 3^k), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Interpretarea contribuției m ca m unități și exprimarea scorului s_k ca suma numerelor N_t, pentru $t = 1, \ldots, k$.	3 p.
Numărarea celor trei posibilități pentru fiecare element mai mic decât t și obținerea factorului 3^{t-1}.	2 p.
Fixarea apartenenței lui k la ambele mulțimi și numărarea alegerilor pentru celelalte elemente: $N_t = 3^{t-1}4^{n-t}$.	2 p.
Calcularea sumei și obținerea formulei $s_k = 4^{n-k}(4^k - 3^k)$, pentru orice $k \in M$.	2 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.