INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A XI-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Fie $n \geq 2$ un număr natural și $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^k B = BA^k$ pentru orice întreg $k \geq 2$.

a) Dacă $AB - BA = B$, arătați că $B = O_n$.

b) Dați un exemplu de matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ care satisfac $A^k B = BA^k$ pentru orice întreg $k \geq 2$ și pentru care $AB - BA = A \neq O_2$, iar produsele AB și BA sunt ambele nenule.

Robert Rogojan

Soluție.

a) Pentru $k = 2$, ipoteza de comutare și relația $AB - BA = B$ dau

$$O_n = A^2B - BA^2 = A(AB - BA) + (AB - BA)A = AB + BA.$$

Din $AB + BA = O_n$ și $AB - BA = B$ rezultă $AB = B/2$ și $BA = -B/2$. Înmulțind de două ori cu A la stânga în prima egalitate și la dreapta în a doua, obținem $A^3B = B/8$ și $BA^3 = -B/8$. Ipoteza pentru $k = 3$ dă $A^3B = BA^3$, așadar $B/8 = -B/8$, de unde $B = O_n$.

b) Alegem $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ date de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $A^2 = O_2$, avem $A^k B = BA^k = O_2$ pentru orice întreg $k \geq 2$. Prin calcul direct, $AB = 2A$ și $BA = A$. Ambele produse sunt nenule, iar $AB - BA = 2A - A = A$.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
a) Deducerea relației $AB + BA = O_n$ folosind ipoteza pentru $k = 2$.	2 p.
a) Obținerea egalităților $AB = B/2$ și $BA = -B/2$.	1 p.
a) Calcularea produselor A^3B și BA^3 (1 p.) și deducerea concluziei $B = O_n$ pentru $k = 3$ (1 p.).	2 p.
b) Alegerea unor matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ care îndeplinesc toate condițiile.	2 p.
b) Verificarea egalității $A^k B = BA^k$ pentru orice întreg $k \geq 2$.	1 p.
b) Verificarea relației $AB - BA = A \neq O_2$ și a faptului că ambele produse AB și BA sunt nenule.	1 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A XI-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 2.

Arătați că nu există niciun număr real $a > 1$ pentru care șirul

$$b_n = \left\lfloor \frac{a^n}{n} \right\rfloor, \qquad n \geq 1,$$

să fie o progresie geometrică. Notația $\lfloor x \rfloor$ desemnează partea întreagă a numărului real x.

Cristi Săvescu

Soluție.

Presupunem, prin absurd, că există $a > 1$ pentru care șirul (b_n) este o progresie geometrică de rație q. Avem $b_1 = \lfloor a \rfloor \geq 1$.

Din definiția părții întregi rezultă

$$\frac{a^n}{n} - 1 < b_n \leq \frac{a^n}{n}, \qquad \text{deci} \qquad 1 - \frac{n}{a^n} < \frac{nb_n}{a^n} \leq 1.$$

Cum $a > 1$, avem $n/a^n \to 0$. Notând $u_n = nb_n/a^n$, obținem $u_n \to 1$. În particular, $b_n > 0$ pentru n suficient de mare. Pentru acești indici,

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = a\,\frac{n}{n+1}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Trecând la limită, rezultă $q = a$. Așadar, pentru orice $n \geq 1$,

$$b_1 a^{n-1} = b_n \leq \frac{a^n}{n}, \qquad \text{de unde} \qquad nb_1 \leq a.$$

Dar $b_1 \geq 1$, astfel că alegerea unui număr natural $n > a$ duce la contradicție. Prin urmare, nu există un asemenea număr a.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Obținerea limitei $nb_n/a^n \to 1$ folosind partea întreagă și $n/a^n \to 0$.	3 p.
Justificarea pozitivității termenilor b_n de la un rang încolo.	1 p.
Calcularea limitei raportului b_{n+1}/b_n (2 p.) și deducerea egalității $q = a$ (1 p.).	3 p.
Obținerea inegalității $nb_1 \leq a$, pentru orice $n \geq 1$, și contradicția finală.	2 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A XI-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 3.

Fie $\sigma, \varphi \in S_n$, unde $n \geq 2$ și σ este o transpoziție. Arătați că $\sigma\varphi = \varphi\sigma$ dacă și numai dacă fiecare element din $\{1, 2, \ldots, n\}$ este fixat de cel puțin una dintre permutările σ, φ și $\sigma\varphi$.

Petru Săveanu

Soluție.

Scriem $\sigma = (i\ j)$ și arătăm că ambele condiții din enunț sunt echivalente cu

$$\{\varphi(i), \varphi(j)\} = \{i, j\}.$$

Transpoziția σ fixează toate elementele diferite de i și j. Așadar, condiția privind punctele fixe trebuie verificată numai pentru i și j. Pentru elementul i, această condiție înseamnă $\varphi(i) = i$ sau $\sigma(\varphi(i)) = i$, adică $\varphi(i) \in \{i, j\}$. Analog, condiția pentru j este $\varphi(j) \in \{i, j\}$. Cum φ este injectivă, condiția din enunț este deci echivalentă cu $\{\varphi(i), \varphi(j)\} = \{i, j\}$.

Pe de altă parte, permutarea $\varphi\sigma\varphi^{-1}$ interschimbă $\varphi(i)$ și $\varphi(j)$ și fixează toate celelalte elemente. Într-adevăr, pentru orice $k \in \{1, \ldots, n\}$, ea trimite $\varphi(k)$ în $\varphi(\sigma(k))$. Rezultă echivalențele

$$\begin{aligned} \sigma\varphi = \varphi\sigma &\iff \varphi\sigma\varphi^{-1} = \sigma \\ &\iff (\varphi(i)\ \varphi(j)) = (i\ j) \\ &\iff \{\varphi(i), \varphi(j)\} = \{i, j\}. \end{aligned}$$

Cele două condiții sunt, așadar, echivalente.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Observația că numai elementele i și j trebuie verificate în condiția privind punctele fixe.	1 p.
Traducerea condițiilor pentru i și j în $\varphi(i), \varphi(j) \in \{i, j\}$.	2 p.
Folosirea injectivității pentru a obține echivalența cu $\{\varphi(i), \varphi(j)\} = \{i, j\}$.	1 p.
Justificarea identității $\varphi\sigma\varphi^{-1} = (\varphi(i)\ \varphi(j))$.	3 p.
Demonstrarea echivalenței dintre comutare și păstrarea mulțimii $\{i, j\}$, apoi concluzia.	2 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător. În particular, cele 5 puncte ale ultimelor două etape se acordă și pentru verificarea directă a echivalenței dintre comutare și păstrarea perechii $\{i, j\}$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A XI-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 4.

Fie $p \in [0,1]$ și $f, g : [0,1] \to [0,1]$ astfel încât

$$|h(x) - p| \leq |x - p|, \qquad \text{pentru orice } x \in [0,1] \text{ și } h \in \{f, g\}.$$

Arătați că orice șir $(x_n)_{n\geq 0}$, cu $x_0 \in [0,1]$ și

$$x_{n+1} \in \left\{ \frac{x_n + f(x_n)}{2}, \frac{x_n + g(x_n)}{2} \right\}, \qquad n \geq 0,$$

este convergent.

Dan-Ștefan Marinescu

Soluție.

Deoarece f și g iau valori în $[0,1]$, prin inducție rezultă că $x_n \in [0,1]$ pentru orice $n \geq 0$.

Observăm că, pentru orice $x \in [0,1]$ și $h \in \{f, g\}$, numărul $(x + h(x))/2$ se află între x și p. Într-adevăr,

$$x \geq p \implies 2p - x \leq h(x) \leq x \implies p \leq \frac{x + h(x)}{2} \leq x,$$

$$x \leq p \implies x \leq h(x) \leq 2p - x \implies x \leq \frac{x + h(x)}{2} \leq p.$$

Așadar, fiecare termen x_{n+1} se află între x_n și p, indiferent de alegerea făcută în relația de recurență.

Dacă $x_0 \geq p$, prin inducție avem $p \leq x_{n+1} \leq x_n$ pentru orice $n \geq 0$, deci șirul este descrescător și mărginit inferior. Dacă $x_0 \leq p$, obținem analog $x_n \leq x_{n+1} \leq p$, deci șirul este crescător și mărginit superior. Pentru $x_0 = p$, șirul este constant, caz inclus în ambele situații.

În toate cazurile, șirul este monoton și mărginit, deci convergent.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Justificarea faptului că $x_n \in [0,1]$ pentru orice $n \geq 0$.	1 p.
Pentru $x \geq p$, obținerea încadrării $p \leq (x + h(x))/2 \leq x$, pentru ambele funcții.	2 p.
Pentru $x \leq p$, obținerea încadrării $x \leq (x + h(x))/2 \leq p$, pentru ambele funcții.	2 p.
Stabilirea monotoniei și a mărginirii șirului, inclusiv în cazul $x_0 = p$.	3 p.
Aplicarea teoremei de convergență a șirurilor monotone și mărginite.	1 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.