INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A XII-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Determinați toate funcțiile $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ pentru care există o primitivă surjectivă $F : (0,\infty) \to (0,\infty)$ a lui f, astfel încât $f \circ F$ să fie o primitivă a funcției $x \mapsto f(x)f(F(x))$.

Cristi Săvescu

Soluție.

Deoarece $F' = f$, avem

$$(F \circ F)'(x) = F'(F(x))F'(x) = f(F(x))f(x), \qquad x > 0.$$

Așadar, $F \circ F$ și $f \circ F$ sunt primitive ale aceleiași funcții pe intervalul $(0,\infty)$. Există deci $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(F(x)) = F(F(x)) + c$, pentru orice $x > 0$. Cum F este surjectivă, rezultă $f(t) = F(t) + c$ pentru orice $t > 0$. În particular, f este derivabilă și $f' = F' = f$. Prin urmare,

$$\big(e^{-x}f(x)\big)' = e^{-x}\big(f'(x) - f(x)\big) = 0,$$

de unde $f(x) = ae^x$, cu $a > 0$, deoarece f ia numai valori pozitive.

Orice primitivă a acestei funcții are forma $F(x) = ae^x + b$. Imaginea ei este $(a+b,\infty)$, deci surjectivitatea lui F impune $b = -a$.

Reciproc, pentru orice $a > 0$, funcțiile $f(x) = ae^x$ și $F(x) = a(e^x - 1)$ satisfac $F' = f$ și $F((0,\infty)) = (0,\infty)$. În plus, deoarece $f' = f$, avem

$$(f \circ F)' = (f' \circ F)F' = (f \circ F)\, f.$$

Prin urmare, toate soluțiile sunt $f(x) = ae^x$, pentru $x > 0$, unde $a > 0$.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Justificarea faptului că $F \circ F$ este o primitivă a funcției $x \mapsto f(x)f(F(x))$.	2 p.
Diferența constantă a primitivelor (1 p.) și deducerea relației $f = F + c$ prin surjectivitate (1 p.).	2 p.
Deducerea relației $f' = f$ și determinarea formei $f(x) = ae^x$, cu $a > 0$.	2 p.
Determinarea primitivei surjective $F(x) = a(e^x - 1)$.	1 p.
Verificarea tuturor condițiilor pentru funcțiile obținute și concluzia.	2 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „MARIAN ŢARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A XII-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 2.

Un *izomorfism de grupuri* este un morfism bijectiv, iar un *automorfism* al unui grup G este un izomorfism de la G la el însuși. Notăm cu $\mathrm{Aut}(G)$ grupul automorfismelor lui G, cu operația de compunere.

Pentru orice număr natural $m \geq 1$, considerăm grupul $(\mathbb{Z}_m, +)$ al claselor de resturi modulo m.

Fie $n \geq 1$ un număr natural impar.

a) Arătați că există un izomorfism între grupul $(\mathbb{Z}_{2n}, +)$ și grupul perechilor $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$, în care adunarea se efectuează pe componente: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

b) Arătați că grupurile $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ și $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2n})$ sunt izomorfe.

Dorin Andrica

Soluție.

a) Notăm cu $[t]_m$ clasa lui t modulo m și punem $P = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$. Aplicația $\theta : \mathbb{Z}_{2n} \to P$, $\theta([t]_{2n}) = ([t]_2, [t]_n)$, este bine definită și respectă adunarea. Dacă $\theta([t]_{2n}) = \theta([s]_{2n})$, atunci $2 \mid t - s$ și $n \mid t - s$. Cum n este impar, rezultă $2n \mid t - s$, deci θ este injectivă. Ambele grupuri au $2n$ elemente, deci θ este un izomorfism.

b) Automorfismele păstrează ordinele elementelor, deoarece $u(kx) = ku(x)$ și injectivitatea lui u dau $kx = 0 \iff ku(x) = 0$. În P, elementul $e = ([1]_2, [0]_n)$ este unicul element de ordin 2: din $2b = 0$ în $\mathbb{Z}_n$ rezultă $b = 0$, deoarece n este impar. De asemenea, elementele de ordin impar sunt exact cele din $K = \{[0]_2\} \times \mathbb{Z}_n$: ordinul lui $(0, b)$ divide n, iar un element cu prima componentă $[1]_2$ are ordin par.

Fie $u \in \mathrm{Aut}(P)$. Rezultă că $u(e) = e$ și $u(K) = K$. Restricția lui u la K dă un automorfism f al lui $(\mathbb{Z}_n, +)$, cu $u(0, b) = (0, f(b))$. Cum $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$ și u fixează $(a, 0)$, avem $u(a, b) = (a, f(b))$. Reciproc, pentru orice $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$, aplicația $u_f(a, b) = (a, f(b))$ este un automorfism al lui P.

Definim $\Phi(f) = \theta^{-1} \circ u_f \circ \theta$. Aplicația $\Phi : \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{2n})$ este bijectivă: orice automorfism v al lui $\mathbb{Z}_{2n}$ corespunde prin $\theta \circ v \circ \theta^{-1}$ unui unic u_f. Din $u_{f \circ g} = u_f \circ u_g$ rezultă $\Phi(f \circ g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$, deci Φ este izomorfismul cerut.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
a) Definirea lui θ, verificarea bunei definiri și a proprietății de morfism.	1 p.
a) Demonstrarea injectivității (1 p.) și a bijectivității lui θ (1 p.).	2 p.
b) Justificarea relațiilor $u(e) = e$ (1 p.) și $u(K) = K$ (1 p.), folosind faptul că n este impar.	2 p.
b) Obținerea formei $u(a, b) = (a, f(b))$, cu f automorfism (1 p.), și verificarea reciprocei (1 p.).	2 p.
b) Construirea bijecției Φ (1 p.) și verificarea compatibilității cu operația de compunere (1 p.).	2 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător. La a) se acordă 3 puncte, iar la b), 6 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A XII-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 3.

Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, pentru orice $x, y \in [0,1]$, și fie $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f, cu $F(0) = 0$.

a) Arătați că $|F(x) - xF(1)| \leq \dfrac{x(1-x)}{2}$, pentru orice $x \in [0,1]$.

b) Arătați că, dacă egalitatea în inegalitatea de la a) are loc pentru cel puțin un $c \in (0,1)$, atunci f este o funcție afină.

Dan-Ștefan Marinescu

Soluție.

a) Notăm $g(x) = F(x) - xF(1)$ și introducem funcțiile $U(x) = \frac{x(1-x)}{2} - g(x)$ și $V(x) = \frac{x(1-x)}{2} + g(x)$. Avem $U(0) = U(1) = V(0) = V(1) = 0$. Cum $g' = f - F(1)$, pentru $0 < x < y < 1$, diferențele $U'(y) - U'(x)$ și $V'(y) - V'(x)$ sunt cel mult $-(y-x) + |f(y) - f(x)| \leq 0$. Așadar, ambele derivate sunt descrescătoare.

Prin teorema lui Rolle există $\alpha \in (0,1)$ cu $U'(\alpha) = 0$. Deci U este crescătoare pe $[0,\alpha]$ și descrescătoare pe $[\alpha,1]$. Din $U(0) = U(1) = 0$ rezultă $U \geq 0$. Analog, $V \geq 0$. Cele două relații dau $|g(x)| \leq x(1-x)/2$, adică inegalitatea cerută.

b) Egalitatea în $c \in (0,1)$ înseamnă că una dintre funcțiile U, V, notată H, satisface $H(c) = 0$. Cum $H \geq 0$, punctul c este de minim, iar teorema lui Fermat dă $H'(c) = 0$. Monotonia lui H' arată că H este crescătoare pe $[0,c]$ și descrescătoare pe $[c,1]$. Prin urmare, $H(x) \leq H(c) = 0$ pe $[0,1]$. Împreună cu $H \geq 0$, obținem $H \equiv 0$.

Așadar, $g(x) = x(1-x)/2$ sau $g(x) = -x(1-x)/2$ pe întregul interval. Prin derivare, obținem, după caz, $f(x) = F(1) + \frac{1}{2} - x$ sau $f(x) = F(1) - \frac{1}{2} + x$ pe $(0,1)$. Ipoteza asupra lui f implică continuitatea sa, deci formula este valabilă și la capete. În ambele cazuri, f este afină.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
a) Introducerea funcțiilor auxiliare și stabilirea valorilor lor la capete.	1 p.
a) Demonstrarea faptului că U' și V' sunt descrescătoare, folosind ipoteza asupra lui f.	2 p.
a) Deducerea relațiilor $U, V \geq 0$ și a inegalității cerute.	2 p.
b) Alegerea funcției care se anulează în c și aplicarea teoremei lui Fermat.	1 p.
b) Demonstrarea faptului că funcția respectivă este identic nulă.	2 p.
b) Obținerea formei lui f și concluzia.	1 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător. La a) se acordă 5 puncte, iar la b), 4 puncte.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A XII-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 4.

Fie $n \geq 3$ un număr natural și S_n grupul permutărilor mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Determinați valoarea minimă a sumei

$$\sum_{\sigma \in H} \operatorname{ord}(\sigma),$$

unde H parcurge submulțimile lui S_n care generează S_n și ale căror elemente sunt cicluri de lungime cel puțin 2.

Vlad Mihaly

Soluție.

Fie H ca în enunț. Fiecare număr din $\{1, \ldots, n\}$ apare în cel puțin un ciclu din H; altfel, ar fi punct fix pentru toate permutările generate de H, ceea ce este imposibil.

Ordinul unui ciclu fiind egal cu lungimea sa, rezultă $\sum_{\sigma \in H} \operatorname{ord}(\sigma) \geq n$. Dacă suma ar fi n, fiecare număr ar apărea în exact un ciclu. Ciclurile din H ar fi deci disjuncte două câte două și ar comuta. Grupul generat ar fi abelian, însă S_n nu este abelian pentru $n \geq 3$. Cum suma este întreagă, rezultă $\sum_{\sigma \in H} \operatorname{ord}(\sigma) \geq n + 1$.

Arătăm că această valoare se poate obține. Considerăm $\tau = (1\,2)$, $\rho = (2\,3\,\ldots\,n)$ și $H = \{\tau, \rho\}$. Pentru $j = 0, 1, \ldots, n-2$, avem

$$\rho^j \tau \rho^{-j} = (1\,\rho^j(2)).$$

Așadar, grupul generat de H conține toate transpozițiile $(1\,k)$, cu $2 \leq k \leq n$. Pentru $2 \leq i < j \leq n$, identitatea $(i\,j) = (1\,i)(1\,j)(1\,i)$ arată că acest grup conține toate transpozițiile. Cum orice permutare este un produs de transpoziții, rezultă că H generează S_n. În plus, $\operatorname{ord}(\tau) + \operatorname{ord}(\rho) = 2 + (n-1) = n + 1$. Valoarea minimă cerută este deci $n + 1$.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Justificarea faptului că fiecare număr apare în cel puțin un ciclu și deducerea limitei inferioare n.	2 p.
Excluderea egalității: ciclurile ar fi disjuncte, iar grupul generat ar fi abelian; deducerea limitei inferioare $n + 1$.	2 p.
Alegerea ciclurilor $(1\,2)$ și $(2\,3\,\ldots\,n)$.	1 p.
Obținerea transpozițiilor $(1\,k)$ prin conjugare (2 p.) și justificarea generării lui S_n (1 p.).	3 p.
Calcularea sumei ordinelor pentru construcția dată și concluzia privind minimul.	1 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător. Se acceptă orice altă mulțime de cicluri care generează S_n și pentru care suma ordinelor este $n + 1$.