INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A IX-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 1.

Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ pentru care, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\frac{(y-1)^2 + xy + 2f(x)}{x + f(y)} + \frac{(x-1)^2 + xy + 2f(y)}{y + f(x)} = \frac{(x+y)^2 + 2}{f(x+y)}.$$

Traian Tămâian

Soluție.

Notăm $a = f(1)$ și $b = f(2)$. Pentru $x = y = 1$, relația dată devine

$$\frac{1+2a}{1+a} = \frac{3}{b}, \qquad \text{deci} \qquad 2b = 3 + \frac{3}{2a+1}.$$

Cum $a \geq 1$, rezultă $3 < 2b \leq 4$. Deoarece b este întreg, avem $b = 2$, iar apoi $a = 1$.

Arătăm prin inducție că $f(n) = n$ pentru orice $n \geq 1$. Egalitatea $f(1) = 1$ este deja stabilită. Presupunem că $f(k) = k$, unde $k \geq 1$. Pentru $x = 1$ și $y = k$, obținem

$$\frac{k^2 - k + 3}{k+1} + \frac{3k}{k+1} = \frac{k^2 + 2k + 3}{f(k+1)},$$

deci $\dfrac{k^2 + 2k + 3}{k+1} = \dfrac{k^2 + 2k + 3}{f(k+1)}$. Numărătorul fiind pozitiv, rezultă $f(k+1) = k+1$, ceea ce încheie inducția.

Reciproc, pentru $f(n) = n$, ambii numitori din membrul stâng sunt $x + y$, iar suma numărătorilor este

$$(y-1)^2 + (x-1)^2 + 2xy + 2x + 2y = (x+y)^2 + 2.$$

Prin urmare, funcția $f(n) = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ verifică relația și este unica soluție.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Determinarea valorilor $f(1) = 1$ și $f(2) = 2$ din cazul $x = y = 1$, folosind faptul că valorile funcției sunt întregi pozitive.	3 p.
Substituția $x = 1$, $y = k$, sub ipoteza $f(k) = k$, și obținerea relației pentru $f(k+1)$.	2 p.
Deducerea egalității $f(k+1) = k+1$ și încheierea inducției.	3 p.
Verificarea funcției $f(n) = n$ în relația inițială.	1 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ŢARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A IX-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 2.

În vârfurile unui poligon convex cu $n \geq 3$ laturi se scriu numerele $1, 2, \ldots, n$, fiecare o singură dată, într-o ordine arbitrară. Pe fiecare latură se scrie cel mai mare divizor comun al numerelor din extremitățile ei.

a) Arătați că există un număr natural care apare pe cel puțin trei laturi.

b) Arătați că, pentru $n = 10$, există o scriere a numerelor în vârfuri pentru care orice număr natural apare pe cel mult trei laturi.

Cristi Săvescu

Soluție.

a) Presupunem, prin absurd, că fiecare număr apare pe cel mult două laturi. Dacă $d = \gcd(a, b)$ este scris pe o latură, atunci a, b sunt multipli distincți ai lui d, deci $2d \leq \max\{a, b\} \leq n$. Astfel, valorile de pe laturi sunt în $\{1, \ldots, m\}$, unde $m = \lfloor n/2 \rfloor$.

Numărând cele n laturi, obținem $n \leq 2m \leq n$. Rezultă $n = 2m$, iar fiecare dintre valorile $1, \ldots, m$ trebuie să apară exact de două ori.

Dar valoarea m poate apărea numai pe latura dintre vârfurile m și $2m$, acestea fiind singurele etichete divizibile cu m din $\{1, \ldots, 2m\}$. Prin urmare, m apare pe cel mult o latură, contradicție.

b) Folosim următoarea scriere a numerelor în ordine ciclică. Sub fiecare vârf este trecută valoarea de pe latura către vârful următor (după 7 urmează 1):

Vârfuri	1	3	9	6	2	4	8	10	5	7
Laturi	1	3	3	2	2	4	2	5	1	1

Valorile 1 și 2 apar de câte trei ori, 3 apare de două ori, iar 4 și 5 apar câte o dată. Scrierea satisface cerința.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
a) Stabilirea faptului că valorile de pe laturi sunt cel mult $\lfloor n/2 \rfloor$.	2 p.
a) Numărarea laturilor: $n = 2m$ și fiecare valoare din $\{1, \ldots, m\}$ ar trebui să apară exact de două ori.	2 p.
a) Observația că m apare pe cel mult o latură și contradicția.	2 p.
b) Construirea unei scrieri corecte a numerelor în vârfuri.	2 p.
b) Verificarea valorilor de pe laturi și a numărului lor de apariții.	1 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A IX-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 3.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale nenule. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică dacă și numai dacă

$$|a_{m+1}a_n - a_{n+1}a_m| \leq \frac{|a_m a_n|}{m+n}, \qquad \text{pentru orice } m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Dan-Ștefan Marinescu

Soluție.

Dacă șirul este o progresie geometrică de rație $q \neq 0$, atunci $a_{n+1} = qa_n$ pentru orice $n \geq 1$, iar membrul stâng al inegalității este nul. Necesitatea este verificată.

Reciproc, presupunem că inegalitatea are loc și notăm $q_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, pentru $n \geq 1$. Împărțind prin $|a_m a_n| > 0$, obținem

$$|q_m - q_n| \leq \frac{1}{m+n}, \qquad m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Fixăm $m \geq 1$. Pentru orice $n \geq 1$, inegalitatea triunghiului dă

$$|q_m - q_1| \leq |q_m - q_n| + |q_n - q_1| \leq \frac{1}{m+n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

Dacă $d = |q_m - q_1|$ ar fi pozitiv, am putea alege un număr natural $n > 2/d$. Atunci $d < 2/n < d$, contradicție. Prin urmare, $q_m = q_1$.

Cum m a fost arbitrar, toate rapoartele sunt egale. Notând $q = q_1 \neq 0$, avem $a_{n+1} = qa_n$ pentru orice $n \geq 1$, deci șirul este o progresie geometrică.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Verificarea necesității.	1 p.
Introducerea rapoartelor $q_n = a_{n+1}/a_n$ și obținerea inegalității $\lvert q_m - q_n\rvert \leq 1/(m+n)$.	2 p.
Aplicarea inegalității triunghiului și estimarea $\lvert q_m - q_1\rvert < 2/n$, pentru orice $n \geq 1$.	3 p.
Alegerea unui număr natural suficient de mare și demonstrarea prin contradicție a egalității $q_m = q_1$.	2 p.
Concluzia că șirul este o progresie geometrică.	1 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CLUJ
COLEGIUL NAŢIONAL „EMIL RACOVIŢĂ” CLUJ-NAPOCA
Str. Mihail Kogălniceanu nr. 9-11, Cluj-Napoca, Tel. Fax: +40770244764
web : www.e-racovita.ro; e-mail: cn@e-racovita.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA- FILIALA CLUJ
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„MARIAN ȚARINĂ”
Ediția a XXIV-a, 20–21 NOIEMBRIE 2026



CLASA A IX-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Problema 4.

Determinați toate tripletele (x, y, z) de numere naturale cu proprietatea

$$(x + y + z)^2 = 7xyz.$$

Dorin Andrica și George C. Țurcaș

Soluția I.

Dacă una dintre componente este zero, atunci $(x + y + z)^2 = 0$, deci $x = y = z = 0$. Acest triplet verifică ecuația.

Presupunem că există soluții strict pozitive și alegem una cu suma $x + y + z$ minimă. Prin simetrie, putem presupune $x \le y \le z$. Definim întregul $w = 7xy - 2x - 2y - z$. Din ecuația dată rezultă $zw = (x + y)^2 > 0$, deci $w \in \mathbb{N}^*$. În plus,

$$(x + y + w)^2 = w^2 + 2(x + y)w + zw = w(w + 2x + 2y + z) = 7xyw.$$

Așadar, (x, y, w) este tot o soluție strict pozitivă. Din minimalitatea sumei rezultă $w \ge z$, deci $w \ge z \ge y$. Prin urmare,

$$0 \le (z - y)(w - y) = (x + 2y)^2 - 7xy^2 \le (9 - 7x)y^2,$$

unde am folosit $x \le y$. Rezultă $7x \le 9$, deci $x = 1$. Atunci inegalitatea precedentă dă $0 \le 1 + 4y - 3y^2$. Dacă $y \ge 2$, am avea $1 + 4y - 3y^2 \le 1 - 2y < 0$; așadar, $y = 1$.

Pentru $x = y = 1$, ecuația ar impune $(z - 1)(z - 2) + 2 = 0$, imposibil pentru un întreg $z \ge 1$, deoarece $(z - 1)(z - 2) \ge 0$. Nu există deci soluții strict pozitive. Singura soluție este $(0, 0, 0)$.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Tratarea cazului cu o componentă nulă și alegerea unei soluții pozitive cu sumă minimă, ordonată $x \le y \le z$.	1 p.
Definirea lui w, identitatea $zw = (x + y)^2$ și justificarea faptului că w este întreg pozitiv.	2 p.
Verificarea noii soluții (x, y, w) și deducerea lui $w \ge z$ din minimalitatea sumei.	2 p.
Identitatea pentru $(z - y)(w - y)$ și deducerea succesivă a egalităților $x = 1$, $y = 1$.	3 p.
Contradicția finală și concluzia că unica soluție este $(0, 0, 0)$.	1 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.



Problema 4 (continuare).

Soluția a II-a.

Dacă una dintre componente este zero, atunci $x+y+z=0$, deci $x=y=z=0$. Tripletul $(0,0,0)$ verifică ecuația.

Presupunem, prin absurd, că există o soluție în numere naturale strict pozitive. Alegem una cu suma $x+y+z$ minimă și, datorită simetriei, putem presupune că $1 \le x \le y \le z$.

Cazul $x=y=1$ este imposibil: ar rezulta $z^2-3z+4=0$, cu discriminantul $\Delta=-7<0$.

Privim relația dată ca pe o ecuație de gradul al doilea în z și considerăm polinomul

$$P(t)=t^2+\big(2(x+y)-7xy\big)t+(x+y)^2.$$

Avem $P(z)=0$. Arătăm că $P(y)<0$. Într-adevăr, $P(y)=(x+2y)^2-7xy^2$, iar:

- dacă $x \ge 2$, folosind $x \le y$, obținem
$$(x+2y)^2 \le 9y^2 < 7xy^2;$$
- dacă $x=1$, atunci $y \ge 2$, deci $1 \le y/2$ și
$$(1+2y)^2 \le \frac{25}{4}y^2 < 7y^2.$$

Așadar, $P(y)<0$ în ambele cazuri. Cum $P(0)=(x+y)^2>0$, $P(z)=0$ și $z \ge y$, din regula semnului trinomului rezultă că cealaltă rădăcină, notată z', satisface $0<z'<y\le z$.

Din relațiile lui Viète, $z'=7xy-2(x+y)-z \in \mathbb{Z}$, deci z' este un număr natural strict pozitiv. Cum $P(z')=0$, avem $(x+y+z')^2=7xyz'$, așadar (x,y,z') este tot o soluție strict pozitivă. Dar $x+y+z'<x+y+z$, în contradicție cu alegerea soluției cu sumă minimă.

Nu există deci soluții strict pozitive. Prin urmare, unica soluție în numere naturale este $\boxed{(x,y,z)=(0,0,0)}$.

Repartizarea punctajului

Etapa rezolvării	**Punctaj**
Cazul cu o componentă nulă și alegerea unei soluții pozitive cu sumă minimă, $x \le y \le z$.	1 p.
Excluderea cazului $x=y=1$.	1 p.
Introducerea polinomului P, cu $P(z)=0$, și demonstrarea inegalității $P(y)<0$ în cele două cazuri.	3 p.
Folosirea semnelor lui $P(0)$ și $P(y)$ pentru a deduce $0<z'<y\le z$.	1 p.
Relația lui Viète, justificarea lui $z' \in \mathbb{N}^*$ și obținerea noii soluții (x,y,z').	2 p.
Contradicția cu minimalitatea sumei și concluzia.	1 p.
Total pentru rezolvare Din oficiu	9 puncte 1 punct
Total problemă	**10 puncte**

Observație. Punctajele celor două soluții nu se cumulează. Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.